مسائل في تحريك الجملة المادية

م.غيث برهاني

تنويه: مسائل هذه المحاضرة مشتركة بين الشعبتين

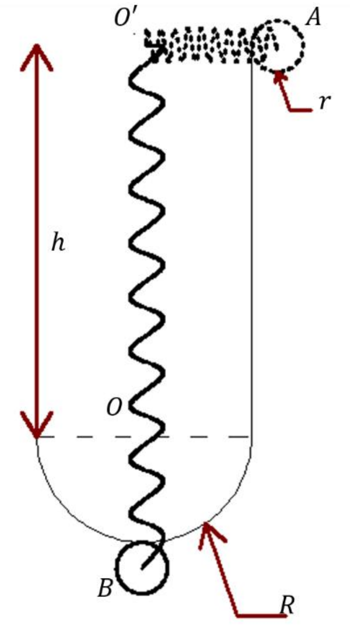
- ملاحظات هامة:

- عندما يكون لدينا مركز ثقل وعزم عطالة نطبق **قوانين الجسم (الجملة)** لا الجسيم (النقطة المادية)
- يجب التمييز بين أنواع الحركات عند دراسة حركة الجملة (انسحابية, مركبة,مستوية عامة)
- عند دراسة **الحركة المستوية العامة** يجب الأخذ بعين الاعتبار **مركز السرع الآنية** (المركز الأني)
- الحركة التدحرجية هي حالة خاصة من الحركة المستوية العامة

المسألة الأولى: قرص مصمت كتلته $M = 5\ Kg$ نصف قطره $r = 10\ cm$ عزم عطالته حول محور يمر من مركز ثقله $I_G = \frac{1}{2} M.r^2$ يرتبط مركز القرص بنابض ثابت صلابته $k = 235\ N.m^{-1}$ وطوله الحر $l_0 = 4r$ والمثبت بالمسند 'O... يبدأ القرص حركته من السكون في الموضع A عندما كان O'G أفقيا ليتدحرج بدون انزلاق على السطح الرأسي البين في الشكل بحيث $R = h = 4r$

المطلوب:

-أوجد عندما يصل القرص إلى الموضع B كلاً من السرعة الخطية لمركز القرص والسرعة الزاوية.



الحل:

لحساب سرعة مركز الثقل G نطبق مبدأ العمل والطاقة على القرص (الذي يتحرك حركة مستوية عامة) بين وضعين... الأول في الموضع A حيث $v_A = 0$ لأنه انطلق من السكون.... والثاني في الموضع B حيث $v_B = ?$

$$E_{k1} - E_{k0} = \sum W_W = W_{Fk} + W_W + W_N$$

$E_{k0} = 0\ ,$ حركة مستوية عامة $E_{k1} = \frac{1}{2}M.v_G^2 + \frac{1}{2}I_G.w^2$

$$W_W = M.g.H\ \ ,\ \ H = h + R + r = 4r + 4r + r = 9r\ \ \Longrightarrow 9M.g.r$$

$$W_N = 0\ \ ,\ \ W_{Fk} = \frac{k}{2}\left(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2\right), \Delta l_{in} = (\mathrm{R} + \mathrm{r}) - 4\mathrm{r} = \mathrm{r}$$

$$,\ \ \Delta l_{fin} = (\mathrm{R} + \mathrm{h} + \mathrm{r}) - 4r = 5r$$

$$\frac{1}{2}M.v_G^2 + \frac{1}{2}I_G.w^2 = 9M.g.r - \frac{k}{2}\{(r)^2 - (5r)^2\} = 9M.g.r - 12k.r^2$$

$$v_G = w.r\ \ \Rightarrow \frac{1}{2}M.w^2.r^2 + \frac{1}{2}I_G.w^2 = 9M.g.r - 12k.r^2$$

$$I_G = \frac{1}{2}M.r^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}M.w^2.r^2 + \frac{1}{4}M.w^2.r^2 = 9M.g.r - 12k.r^2$$

$$\frac{3}{4}w^2.r^2.M = 9M.g.r - 12k.r^2 \Longrightarrow w^2 = \frac{4}{3}\left(9.\frac{g}{r} - \frac{12}{M}k\right) = \frac{4}{3}\left(9\frac{9.8}{0.1} - \frac{12}{5}235\right) =$$

$w = 20.6\ r/s$ وجهة الدوران مع عقارب الساعة

$$v_G = w.r = 2.06\ m/s$$

المسألة الثانية: جسيم AB كتلته M=30 Kg طوله $l = 1.5\ m$ عزم عطالته حول مركز الثقل $I_G = \frac{1}{12}M.l^2$ يرتبط طرفه B بنابض بطوله الحرمعامل مرونته $k = 300\ N.m^{-1}$ عندما كانت الزاوية $\theta = 30°$ تبدأ حركة القضيب في المستوي الرأسي (الشاقولي) من السكون بانزلاق A على الدليل الأفقي الأملس وبانزلاق B على المستوي الرأسي الأملس.

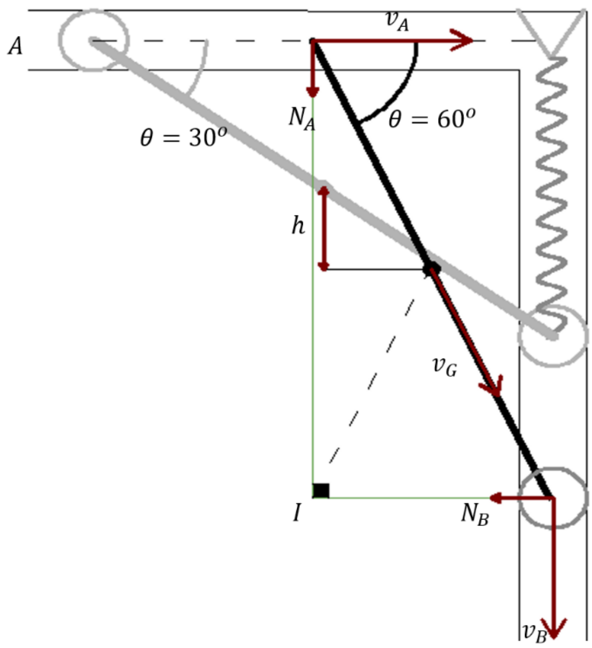
المطلوب:

-أوجد عندما $\theta = 60°$ السرعة الزاوية للقضيب AB والسرعة الخطية لكل من طرفيه وسرعة مركز الثقل.

$$w = ?\ ,\qquad v_A = ?\ ,\qquad v_B = ?\ ,\qquad v_G = ?$$

الحل:

في البداية نحدد المركز الأني لسرعة القضيب والذي يتعين بتمديد أعمدة من منحى سرعتي نقطتين على القضيب كما في الشكل الموضح... فينتج التقاطع I



لحساب السرعة الزاوية نطبق مبدأ العمل والطاقة على القضيب AB (الذي يتحرك حركة مستوية عامة) بين وضعين... الأول عندما $v_G = 0$, $\theta = 30°$ ....والثاني عندما , $\theta = 60°$

$v_B = ?$

$$E_{k1} - E_{k0} = \sum W_W = W_{W_G} + W_{N_B} + W_{N_A} + W_{F_k}$$

$$E_{k0} = 0 , \qquad E_{k1} = \frac{1}{2} M . v_G^2 + \frac{1}{2} I_G . w^2$$

$$W_W = M . g . H \ ,$$

$$H = \frac{l}{2}(\sin 60° - \sin 30°) = \frac{l}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{l}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\Longrightarrow W_W = M . g . \frac{l}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

$$W_{N_B} = W_{N_A} = 0 \quad , \qquad W_{F_k} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

$$\Delta l_{in} = 0 \quad , \quad \Delta l_{fin} = l(\sin 60° - \sin 30°) = \frac{l}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

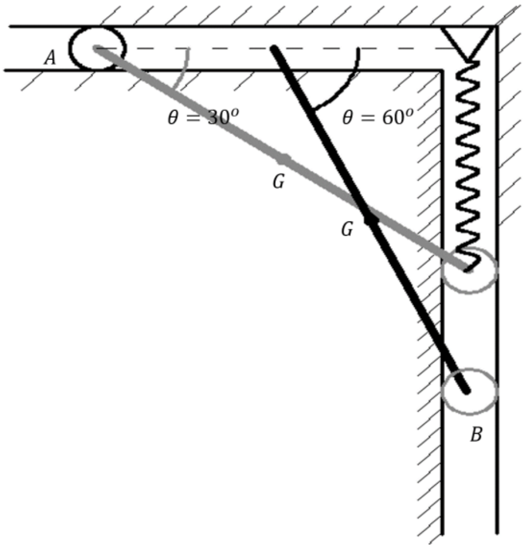
$$\Longrightarrow W_{F_k} = -\frac{k}{8} . l^2 \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} M . v_G^2 + \frac{1}{2} I_G . w^2 = M . g . \frac{l}{4}(\sqrt{3} - 1) - \frac{k}{8} . l^2 \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$$

$$v_G = w . IG = w . \frac{l}{2} \quad , \qquad I_G = \frac{1}{12} M . l^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{8} M . w^2 . l^2 + \frac{1}{24} M . w^2 . l^2 = M . g . \frac{l}{4}(\sqrt{3} - 1) - \frac{k}{8} . l^2 \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$$

$$\frac{1}{6} M . w^2 . l^2 = + M . g . \frac{l}{4}(\sqrt{3} - 1) - \frac{k}{8} . l^2 \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$$



$$w^2 = \frac{6}{4}\frac{g}{l}(\sqrt{3}-1) - \frac{6}{8}\frac{k}{M}(\sqrt{3}-1)^2$$

$$w^2 = \frac{6}{4} \times \frac{9.8}{1.5}(\sqrt{3}-1) - \frac{6}{8} \times \frac{300}{30}(\sqrt{3}-1)^2 =$$

جهة الدوران مع عقارب الساعة

$$w = 1.778 r/s$$

$$v_A = w.IA = w.l.sin60° = 2.31 m/s$$

$$v_B = w.IB = w.l.cos60° = 1.33 m/s$$

$$v_G = w.IG = w.\frac{l}{2} = 1.33 m/s$$

المسألة الثالثة:

المسألة نفسها في شكل أخر(كما في الرسم المحدد) والمعطيات نفسها... أوجد طلبات المسألة السابقة عندما تصبح الساق أفقية كما في الشكل الموضح...

الحل:

في البداية نحدد المركز الأني لسرعة القضيب والذي يتعين بتمديد أعمدة من منحى سرعتي نقطتين على القضيب كما في الشكل الموضح... فينتج التقاطع I

لحساب السرعة الزاوية نطبق مبدأ العمل والطاقة على القضيب **AB** (الذي يتحرك حركة دورانية حول **A**) بين وضعين... الأول عندما $v_A = 0$, $\theta = 30°$.... والثاني عندما $v_B = ?$, $\theta = 0°$.....

$$E_{k1} - E_{k0} = \sum W_W = W_{W_G} + W_{N_B} + W_{N_A} + W_{F_k}$$

$$W_W = M.g.H = M.g.\frac{l}{2}\sin 30° = \frac{l}{4}M.g$$

$$I_A = I_I = I_B + Md^2 = \frac{1}{3}M\,l^2$$

$$W_{N_B} = W_{N_A} = 0$$

$$W_{F_k} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

$$\Delta l_{in} = 0 \ , \qquad \Delta l_{fin} = l - l.\cos 30° = l\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{l}{2}(2 - \sqrt{3})$$

$$W_{F_k} = -\frac{k}{2}\frac{l^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2$$

$$v_G = w.IG = w.\frac{l}{2} \ , \qquad I_G = \frac{1}{12}M.l^2 =$$

$$\frac{1}{6}M.w^2.l^2 = \frac{l}{4}M.g - \frac{k}{2}\frac{l^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2$$

$$\frac{1}{6}M.w^2.l^2 = \frac{l}{4}M.g - \frac{k}{2}\frac{l^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow w^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l} - \frac{3}{4}\frac{k}{M}(2 - \sqrt{3})^2$$

$$w^2 = \frac{3}{2}\frac{9.8}{1.5} - \frac{3}{4}\frac{300}{30}(2 - \sqrt{3})^2 = 7.55 r/s$$

$$v_G = w.IG = 2.06 m/s$$

$$v_A = 0 m/s$$

$$v_B = w.IB = 4.12\ m/s$$

ملحق من المحاضرة الخامسة (شعبة ثانية):

تعلق كرة وزنها $P = m.g$ بخيط طوله $l = a$ يثبت طرفه الأخر بمركز تعليق 'O وتستند الكرة على سطح اسطوانة ملساء نصف قطرها a بحيث يميل O'A زاوية α إذا ما قطع الخيط في الموقع A تنزلق الكرة على الاسطوانة وتتركها في الموقع B

المطلوب:

1. علاقة سرعة الكرة أثناء حركتها بدلالة الزاوية φ (زاوية الدوران بالنسبة للاسطوانة مع الشاقول) $(v_\varphi = ?)$
2. علاقة رد فعل الاسطوانة على الكرة بدلالة الزاوية φ $(N_\varphi = ?)$
3. تحديد الموقع B التي تترك به الكرة سطح الاسطوانة وإيجاد قيمة سرعتها عندئذ.

لإيجاد علاقة السرعة نطبق مبدأ العمل والطاقة بين وضعين... الأول عند A حيث $v_A = 0$... **والثاني عند B حيث** $v_B = ?$

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \sum W_{\vec{F}} = W_N + W_P$$

لدينا : $W_N = 0$ **لأنه عمودي على الانتقال في كل لحظة**

$$v_A = 0 \ , \qquad W_P = m.g.h \ , \qquad h = a(\cos\alpha - \cos\varphi)$$

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 = m.g.a(\cos\alpha - \cos\varphi) \Rightarrow v_B^2 = 2.g.a(\cos\alpha - \cos\varphi)$$

2- لإيجاد علاقة رد الفعل نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم بعد تحريره من قيوده:

$$\sum\vec{F} = m.\vec{A} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{N_\varphi} = m.\vec{A}$$

نسقط على $\vec{n}$**:**

$$m.g.\cos\varphi - N_\varphi = m.A^n \Rightarrow N_\varphi = m.g.\cos\varphi - m.A^n$$

$$\Rightarrow N_\varphi = m.g.\cos\varphi - m.\frac{v_\varphi^2}{a}$$

بتعويض علاقة السرعة:

$$N_\varphi = m.g.\cos\varphi - \frac{m}{a}(2.g.a(\cos\alpha - \cos\varphi))$$

$$\Rightarrow N_\varphi = 3m.g.\cos\varphi - 2m.g.\cos\alpha$$

لإيجاد موقع ترك الكرة نعدم رد الفعل فنحصل على الموضع المطلوب بدلالة الزاوية:

$$N_\varphi = N_B \Leftrightarrow N_\varphi = 0 \Rightarrow 3m.g.\cos\varphi = 2m.g.cos\alpha \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3}\cos\alpha$$

ولإيجاد السرعة نعوض الزاوية الناتجة في علاقة v_φ **فينتج:**

$$v_B = 2.g.a(\cos\alpha - \frac{1}{3}\cos\alpha) = \frac{4}{3}g.a.\cos\alpha$$